

الحملة المغربية

وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي

Leçons N°2 درس رقم

المجموعات *** seLes ensemb

إعتبرات تربوية:

- عن التوجيهات التربوية العامة لتدريس مادة الرياضيات :
 - تزويد التلاميذ بمفاهيم ومبادئ أولية لتنظيم أفكارهم.
 - مدهم بتقنيات ونماذج تساعدهم على بناء وصياغة البراهين الرياضية على أسس واضحة و سليمة.
- ملاحظة:** بلوغ هذه الأهداف لا يتحقق مع إنتهاء هذا الفصل، لذا يجب إستعمال نتائجه كلما سنحت الفرصة لذلك في مختلف فصول البرنامج اللاحقة.

البرامج والقدرات المنتظرة والتوجيهات التربوية

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<ul style="list-style-type: none"> • ينبغي تقرب العبارات و القوانين المنطقية وطرائق الإستدلال إنطلاقاً من أنشطة متنوعة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق التعامل معها. • تجنب البناء النظري و الإفراط في إستعمال جداول الحقيقة. • يعتبر هذا الفصل فرصة لحل معادلات و متراجحات لا جذرية و بعض المتفاوتات. • إن درس المنطق لا ينتهي بإنتهاء هذا الفصل بل ينبغي إستثمار نتائجه كلما سمحت الفصة لذلك بمختلف فصا . المق 	<ul style="list-style-type: none"> • تحويل نص رياضي إلى كتابة ترميزية بإستعمال الروابط و المكلمات وعكس ذلك. • إستعمال إستدلال مناسب حسب الوضعية المدروسة. • التمكن من صياغة براهين و إستدلالات رياضية واضحة و سليمة منطقياً. 	<p>(1) تعاريف ومصطلحات: النص الرياضي- العبارة - الدالة العبارية. المكلمات و العبارات المكمنة. العمليات المنطقية. النفي- العطف- الفصل- الإستلزام- التكافؤ</p> <p>(2) القوانين المنطقية و الإستدلالات الرياضية: جرد لقوانين منطقية أساسية. الإستدلال الإستنتاجي. الإستدلال بالتكافؤات المتتالية الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس الإستدلال بالخلف. الإستدلال بفصل الحالات.</p>

السنة الأولى من سلك البكالوريا علوم رياضية
Première année du bac Sciences maths
Le nouveau programme : 2006 - 2007

المجموعات **** Les ensembles

(1) الإلتواء - التضمن - التواءي - مجموعة أجزاء مجموعة :

(a) - تعريف مجموعة:

تعريف: نسمي مجموعة كل تجميع لعناصر معينة: Un ensemble est une collection d'objets: يمكن كتابة مجموعة E بطريقتين:
• بتفصيل وذلك بآرد جميع عناصرها.
• بإدراك وذلك بتحديد علاقة مميزة لعناصرها.
المجموعة الفارغة نمرز لها بالرمز: \emptyset

مثال :

لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي مربعاتها أصغر أو تساوي 40.

• كتابة A بإدراك: $A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 40\}$

• كتابة A بتفصيل: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

تطبيق :

(1) أكتب بتفصيل المجموعات التالية: $A = \{x \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$

(2) أكتب بإدراك المجموعات التالية: $A = \{1, 3, 9, \dots\}$ و $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$

(b) - الإلتواء:

تعريف:

لتكن E مجموعة.

نقول إن a ينتمي إلى E إذا كان a عنصرا من E و نكتب $a \in E$

نقول إن a لا ينتمي إلى E إذا كانت المجموعة E لا تحتوي على العنصر a و نكتب $a \notin E$

أمثلة :

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ و $\pi \notin \mathbb{Q}$ و $1, 032 \in \mathbb{ID}$ و $-10^3 \in \mathbb{Z}$

(c) - التضمن:

تعريف:

A و B جزاءن من مجموعة E.

نقول إن A ضمن B أو B يتضمن A و نكتب $A \subset B$ ، إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B.

بتعبير آخر: $A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B]$

مثال :

نعتبر المجموعة $E = \{-2, 1, 3\}$

لدينا: $\{1\} \subset E$ و $\{1, 3\} \subset E$ و $\{-2, 1, 3\} \subset E$

لكل مجموعة F لدينا $\emptyset \subset F$ و $F \subset F$

خاصية :

A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E

إذا كان $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$

البرهان

ليكن x عنصرا من E .
(لأن $A \subset B$) $x \in A \Rightarrow x \in B$
(لأن $B \subset A$) $\Rightarrow x \in C$

إذن: $x \in A \Rightarrow x \in C$ وبالتالي: $A \subset B$ و $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

(d) - التساوي :

تعريف:

A و B جزءان من مجموعة E .
نقول إن A و B متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$.

بمعنى: $A = B \Leftrightarrow [\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

مثال:

نعتبر المجموعتين A و B بحيث: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1 \right\}$ و $B =]0; 4[$

لدينا: $x \in A \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{x}{2} \right| < 1$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in B$$

إذن: $A = B$

تطبيقات:

(1) نعتبر المجموعتين A و B بحيث:

$$A =]-\infty; -1[\text{ و } B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x+1} > 1 \right\} \text{ بين أن: } A = B$$

$$(2) \text{ لتكن } A = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ و } B = \left\{ -\frac{7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{ و } C = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ أ- بين أن } A = B$$

ب- هل $A = C$ ؟ علل جوابك

e) - مجموعة أجزاء مجموعة:

تعريف:

لتكن E مجموعة.

المجموعة المكونة من جميع أجزاء E تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E ونرمز لها بالرمز $P(E)$

$$\text{لدينا: } A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

لكل مجموعة E لدينا: $\emptyset \in P(E)$ و $E \in P(E)$

أمثلة :

$$(1) \text{ لتكن: الأحادية } E = \{a\}$$

$$\text{لدينا: } P(E) = \{\emptyset; \{a\}\}$$

$$(2) \text{ لتكن: } F = \{1; 3\}$$

$$\text{لدينا: } P(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{3\}; \{1, 3\}\}$$

تطبيق:

لتكن $E = \{a, b, c\}$. أكتب بتفصيل مجموعة أجزاء E : $P(E)$.

(2) العمليات في المجموعة $P(E)$:

a - تقاطع مجموعتين :

تعريف :

A و B جزءان من مجموعة E.
تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة التي نرمز لها بالرمز $A \cap B$ والمكونة من العناصر التي تنتمي إلى A وإلى B

لدينا: $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$ ونكتب: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B)$

مثال:

لتكن $D_{(4)}$ و $D_{(6)}$ مجموعتي القواسم الموجبة للعددين 4 و 6 على التوالي. لدينا: $D_{(4)} = \{1, 2, 4\}$ و $D_{(6)} = \{1, 2, 3, 6\}$
إذن تقاطع المجموعتين $D_{(4)}$ و $D_{(6)}$ هو المجموعة: $D_{(4)} \cap D_{(6)} = \{1, 2\}$

تطبيق:

لتكن $A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 3\}$ حدد بتفصيل المجموعة $A \cap B$

خصائص:

A و B و C أجزاء من مجموعة E, لدينا:

$$(1) \quad A \cap B \subset B \text{ و } A \cap B \subset A$$

$$(2) \quad A \cap \emptyset = \emptyset \text{ و } A \cap A \subset A$$

$$(3) \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \text{ و } A \cap B = B \cap A$$

$$(4) \quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

البرهان عن الخاصية 4 :

نبين صحة الاستلزام: $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

نفترض أن $A \cap B = A$ ونبين أن $A \subset B$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$$

$$\Rightarrow x \in A \quad x \in B \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow x \in B$$

إذن: $A \subset B$

ومنه: (1) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

نبين صحة الإستلزام: $A \subset B = A \cap B = A$

نفترض أن $A \subset B$ ونبين أن $A \cap B = A$

لدينا: $A \cap B \subset A$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \quad x \in B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \quad (\text{لأن } A \subset B)$$

إذن: $A \subset A \cap B$

ومنه: $A \cap B = A$

وبالتالي: (2) $A \subset B = A \cap B = A$

من (1) و (2) نستنتج أن: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

b - إتحاد مجموعتين :

تعريف:

A و B جزءان من مجموعة E.
إتحاد A و B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A والعناصر التي تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتقرأ A إتحاد B.

لدينا: $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$ ونكتب: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ أو } x \in B)$

أمثلة :

(1) لتكن $A = \{-5; -\sqrt{2}; 0; 1\}$ و $B = \{-5; 1; \sqrt{2}; 3\}$

لدينا: $A \cup B = \{-5; -\sqrt{2}; 0; 1; \sqrt{2}; 3\}$

(2) لتكن $F = [-2; 3]$ و $G =]1, 8]$

لدينا: $F \cup G = [-2, 8]$

تطبيق:

لتكن $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 19\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} / |x+3| \leq 5\}$ حدد بتفصيل المجموعة $A \cup B$

خاصيات:

A و B و C أجزاء من مجموعة E, لدينا:

$$(1) \quad A \cap B \subset A \cup B \quad \text{و} \quad B \subset A \cup B \quad \text{و} \quad A \subset A \cup B$$

$$(2) \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{و} \quad A \cup A = E \quad \text{و} \quad A \cup \emptyset = A \quad \text{و} \quad A \cup A = A$$

$$(3) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$(4) \quad A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$$

البرهان عن الخاصية 4:

نبين صحة الاستلزام: $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

نفترض أن $A \cup B = A$ ونبين أن $B \subset A$

لدينا: $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

(لأن $A \cup B = A$) ونبين أن $B \subset A$

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

لدينا:

$$\Rightarrow x \in A$$

(لأن $A \cup B = A$)

إذن: $B \subset A$

ومنه: (1) $A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$

* نبين صحة الاستلزام: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = A$

نفترض أن $B \subset A$ ونبين أن $A \cup B = A$

لدينا: $A \subset A \cup B$

و $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

(لأن $B \subset A$) $\Rightarrow x \in A$

إذن: $A \cup B \subset A$

ومنه: $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

من (1) و (2) نستنتج أن: $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

C - المتممة - فرق مجموعتين :

أ-المتممة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة E.

مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة A في E ونرمز لها بالرمز C_E^A أو \bar{A}

$$\forall x \in E, x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in A \quad \text{و} \quad C_E^A = \{x \in E / x \notin A\} \quad \text{لدينا:}$$

مثال:

نضع $2\mathbb{N} = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية.

متممة المجموعة $2\mathbb{N}$ في \mathbb{N} هي المجموعة: $\overline{2\mathbb{N}} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$: مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية.

تطبيق:

لتكن $C_N^A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4x > 0\}$ أكتب بتفصيل المجموعة C_N^A

خاصيات:

$C_E^{C_E^A} = A$	$C_E^\emptyset = E$	$C_E^E = \emptyset$ (1)
		$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ (2)

البرهان عن الخاصية 2

• نبين صحة الاستلزام: $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

• نفترض أن $A \subset B$ ونبين أن $\overline{B} \subset \overline{A}$

$$x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow x \in \overline{A}$$

إذن: $\overline{B} \subset \overline{A}$

ومنه: (1) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

* نبين صحة الإستلزام: $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$

نفترض أن $\overline{B} \subset \overline{A}$ ونبين أن $A \subset B$

$$x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow x \notin \overline{B}$$

$$\Rightarrow x \in B \quad (\text{لأن } \overline{B} \subset \overline{A})$$

إذن: $A \subset B$

ومنه: (2) $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$

من (1) و (2) نستنتج أن: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

ب - فرق مجموعتين:

تعريف:

A و B جزآن من مجموعة E نسمي فرق A و B في هذا الترتيب المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. نرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \setminus B$

ونكتب:

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\} \quad \text{لدينا: } (x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \notin B)$$

أمثلة:

$$(1) \text{ لتكن } A = \left\{-5; 0; \frac{1}{3}; \sqrt{7}; 5; \frac{11}{12}\right\} \text{ و } B = \left\{-5; -3; 2; 5; 6; \frac{11}{12}\right\}$$

$$\text{لدينا: } B \setminus A = \{-3; 2; 6\} \text{ و } A \setminus B = \left\{0; \frac{1}{3}; \sqrt{7}\right\}$$

$$(2) \text{ نعتبر المجالين: } J = [0, 5] \text{ و } I = [-1, 3] \text{ : لدينا: } I \setminus J = [-1, 0[\text{ و } J \setminus I =]3, 5]$$

ملاحظة:

إذا كان $A \subset B$ فإن: $A \setminus B = \emptyset$ و $B \setminus A = C_B^A$

خاصية:

A و B جزآن من مجموعة E.

$$A \setminus B = A \cap C_E^B \quad (1) \text{ لدينا:}$$

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad (2)$$

البرهان:

(1) لكل x من E، لدينا:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin C_E^B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap C_E^B$$

$$\text{إذن: } A \setminus B = A \cap C_E^B$$

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \quad (2)$$

$$= A \cap (\overline{B} \cup B)$$

$$= A \cap E$$

$$= A$$

d- خاصيات مشتركة :

خاصية 1: التوزيعية:

A و B و C أجزاء من مجموعة E.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1) \text{ لدينا:}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2)$$

البرهان:

لكل x من E، لدينا:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ (} x \in B \text{ أو } x \in C \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B) \text{ أو } (x \in A \text{ و } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ أو } x \in A \cap C$$

$$\text{إذن: } A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

لكل x من E، لدينا:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ أو } x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ أو } (x \in B \text{ أو } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ أو } x \in B) \text{ و } (x \in A \text{ أو } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{إذن: } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

خاصية 2: قانون موركان (Lois de Morgan)

A و B جزآن من E، لدينا:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (2) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1)$$

البرهان:

لكل x من E، لدينا:

$$1) x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ أو } x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ أو } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\text{إذن: } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2) x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ و } x \in \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ إذن:}$$

تطبيقات:

(1) نعتبر المجموعتين A و B بحيث:

$$B = \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ و } A = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

أ - بين أن $(A \cap B) = \emptyset$

ب - حد المجموعة: $(A \cap B) \cap \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

(2) A و B و C أجزاء من مجموعة E.

أ - بين أن: $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$

ب - بين أن: $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$

ج - بسط ما يلي:

$$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{(A \cap C)} \text{ و } A \cap \overline{(B \cap C)}$$

(3) لتكن A و B و C أجزاء من مجموعة E.

أ - بين أن: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

ب - بين أن: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

ج - بين أنه إذا كان $A \cap B = A \cap C$ و $A \setminus B = A \setminus C$ فإن: $B = C$

(3) الجداء الديكارتي:

تعريف:

E و F مجموعتان:

الجداء الديكارتي $E \times F$ للمجموعتين E و F هو مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in E$ و $y \in F$

$$\text{لدينا: } \boxed{A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ و } y \in B\}} \text{ و } \boxed{(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } y \in B}$$

ملاحظات:

• إذا كانت $E = F$ ، نرسم للمجموعة $E \times F$ بالرمز E^2 وتسمى المربع الديكارتي للمجموعة E.

• لتكن E و F مجموعتان: $\boxed{E \times F = \emptyset \Leftrightarrow (E = \emptyset \text{ و } F = \emptyset)}$

أمثلة:

(1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$

نضع: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ونكتب: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$

(2) لتكن $A = \{n \in \mathbb{N} / 3 \leq n^2 \leq 16\}$ و $B = \{n \in \mathbb{N} / 3n + 1 \leq 12\}$

لدينا: $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{0, 1, 2, 3\}$

إذن: $A \times B = \{(2; 0), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 0), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$

و $B \times A = \{(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}$

ملاحظة: عدد عناصر $A \times B$ هو عدد عناصر $B \times A$ لكن $A \times B \neq B \times A$