ملخص درس المجموعات

1) الإنتماء – التضمن – التساوي – مجموعة أجزاء مجموعة :

a) - تعريف مجموعة:

نسمي مجموعة كل تجميع لعناصر معينة :Un ensemble est une collection d'objets

يمكن كتابة مجموعة E بطريقتين:

- بتفصيل وذلك بجرد جميع عناصرها.
- بإدراك وذلك بتحديد علاقة مميزة لعناصرها.

المجموعة الفارغة نرمز لهابالرمز: $\varnothing$

b) -الإنتماء:

لتكن E مجموعة.

نقول إن a ينتمي إلى E إذا كان a عنصرا من E و نكتب $\boxed{a \in E}$

نقول إن a لا ينتمي إلى E إذا كانت المجموعة E لا تحتوي على العنصر a و نكتب $\boxed{a \notin E}$

c) -التضمن:

A و B جزءان من مجموعة E.

نقول إن A ضمن B أو B يتضمن A ونكتب $A \subset B$ ، إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B,

بتعبير آخر: $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow [\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B]}$

خاصية :

A و B و C ثلاثة أجزاء من مجموعة E

إذا كان $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$

d) - التساوي :

A و B جزءان من مجموعة E .

نقول إن A و B متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$.

e) - مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن E مجموعة.

المجموعة المكونة من جميع أجزاء E تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E و نرمز لها بالرمز $P(E)$

لدينا: $\boxed{A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E}$

لكل مجموعة E لدينا: $\varnothing \in P(E)$ و $E \in P(E)$

2) العمليات في المجموعة $P(E)$:

a - تقاطع مجموعتين :

A و B جزءان من مجموعة E.

تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة التي نرمز لها بالرمز $A \cap B$ والمكونة من العناصر التي تنتمي إلى A وإلى B

لدينا: $\boxed{A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ و } x \in B\}}$ و نكتب : $\boxed{(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ و } x \in B)}$

خاصية : A و B و C أجزاء من مجموعة E، لدينا:

1) $\boxed{A\cap B\subset A}$ و $\boxed{A\cap B\subset B}$

2) $\boxed{A\cap A\subset A}$ و $\boxed{A\cap\varnothing=\varnothing}$

3) $\boxed{A\cap B=B\cap A}$ و $\boxed{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$

4) $\boxed{A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B}$

b - إتحاد مجموعتين :

A و B جزءان من مجموعة E.
اتحاد A و B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A والعناصر التي تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A\cup B$ وتقرأ A اتحاد B.

لدينا: $\boxed{A\cup B=\{x\in E\ /\ x\in A \text{ أو } x\in B\}}$ و نكتب : $\boxed{(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ أو } x\in B)}$

خاصيات:

A و B و C أجزاء من مجموعة E، لدينا:

1) $\boxed{A\subset A\cup B}$ و $\boxed{B\subset A\cup B}$ و $\boxed{A\cap B\subset A\cup B}$

2) $\boxed{A\cup A=A}$ و $\boxed{A\cup\varnothing=A}$ و $\boxed{A\cup\overline{A}=E}$ و $\boxed{A\cup B=B\cup A}$

3) $\boxed{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$

4) $\boxed{A\cup B=A\Leftrightarrow B\subset A}$

c(– المتمة – فرق مجموعتين :

أ-المتممة:

ليكن A جزءا من مجموعة E.
مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة A في E ونرمز لها بالرمز C_E^A أو $\overline{A}$

لدينا: $\boxed{C_E^A=\{x\in E\ /\ x\notin A\}}$ و $\boxed{\forall x\in E, x\notin\overline{A}\Leftrightarrow x\in A}$

خاصيات:

A و B جزءان من مجموعة E.

1) $\boxed{C_E^E=\varnothing}$ $\boxed{C_E^{\varnothing}=E}$ $\boxed{C_E^{C_E^A}=A}$

2) $\boxed{A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}}$

ب - فرق مجموعتين:

A و B جزءان من مجموعة E
نسمي فرق A و B في هذا الترتيب المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. نرمز لهذه المجموعة بالرمز A \ B

ونكتب:

$\boxed{A\setminus B=\{x\in E\ /\ x\in A \text{ و } x\notin B\}}$ لدينا: $\boxed{(x\in A\setminus B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ و } x\notin B)}$

ملاحظة:

إذا كان $A\subset B$ **فإن:** $A\setminus B=\varnothing$ **و** $B\setminus A=C_B^A$

خاصية:

A و B جزءان من مجموعة E.
لدينا: 1) $A\setminus B=A\cap C_E^B$
2) $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

d- خاصيات مشتركة :

خاصية1: التوزيعية:

A و B و C أجزاء من مجموعة E.

لدينا: 1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

خاصية 2: قانونا موركان (Lois de Morgan)

A و B جزءان من E، لدينا:

1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

3) الجداء الديكارتي:

تعريف:

E و F مجموعتان:

الجداء الديكارتي E x F للمجموعتين E و F هو مجموعة الأزواج (x¸y) حيث $x\in E$ و $y\in F$

لدينا: $\boxed{A\times B=\{(x,y)/x\in A \text{ و } x\in B\}}$ و $\boxed{(x,y)\in A\times B\Leftrightarrow x\in A \text{ و } y\in B}$

ملاحظات:

- إذا كانت E = F، نرمز للمجموعة $E\times F$ بالرمز E^2 وتسمى المربع الديكارتي للمجموعة E.
- لتكن E و F مجموعتان: $\boxed{E\times F=\varnothing\Leftrightarrow(E=\varnothing \text{ و } F=\varnothing)}$

ملاحظة : عدد عناصر **A x B** هو عدد عناصر **B x A** لكن $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

ملخص درس التطبيقات

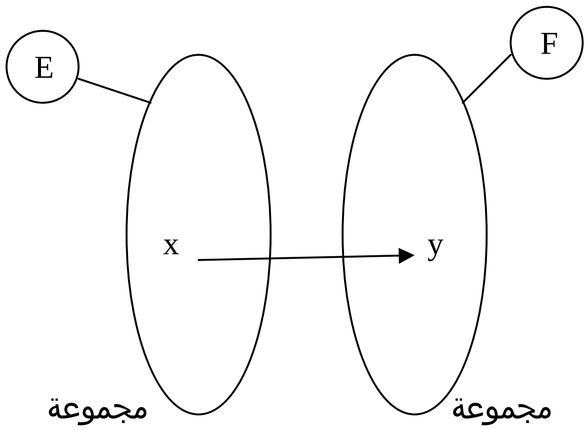
I)_تعريف تطبيق - تساوي تطبيقين :

1) تعريف تطبيق:

تعريف:

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين.

نسمي تطبيقا من E نحو F كل علاقة تربط كل عنصر x من E بعنصر y وحيد من F .



إذا رمزنا لهذه العلاقة بالرمز f فإننا نكتب: $\begin{array}{l} f\ :E \to F \\ \quad x \to y=f(x) \end{array}$

- المجموعة E تسمى مجموعة انطلاق التطبيق f.
- المجموعة F تسمى مجموعة وصول التطبيق f.
- العنصر y يسمى صورة العنصر x بالتطبيق f ونكتب $y = f(x)$
- العنصر x يسمى سابقا للعنصر y بالتطبيق f.
- المجموعة $\{(x;y) \in E \times F \,/\, y = f(x)\}$ تسمى المبيان الديكارتي للتطبيق f. ونرمز لها بالرمز $G(f)$

ملاحظة:

يمكن صياغة تعريف تطبيق كالتالي: $\boxed{(f \text{ تطبيق من } E \text{ نحو } F) \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists! y \in F) : f(x) = y)}$

خاصية :

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين.

(f تطبيق من E نحو F) $\Leftrightarrow \left[\forall (x, x') \in E^2 \quad x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')\right]$.

2) تساوي تطبيقين:

تعريف:

f و g تطبيقان من E نحو F .

نقول إن f و g متساويان ونكتب $f = g$ إذا كان لكل x من E $f(x) = g(x)$

و $\boxed{f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in E \ f(x) \neq g(x)}$

II) قصور تطبيق – تمديد تطبيق:

تعريف 1

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A جزء من E.

التطبيق: $\begin{array}{l} g : A \to F \\ \quad x \to f(x) \end{array}$ يسمى قصور التطبيق f على المجموعة A

تعريف 2

ليكن f تطبيقا من E نحو F و G مجموعة حيث $E \subset G$.

كل تطبيق: $\begin{aligned} g: G &\to F \\ x &\to g(x) \end{aligned}$ حيث: $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

يسمى تمديدا للتطبيق f إلى المجموعة G .

III) الصورة المباشرة والصور العكسية لجزء بتطبيق:

1) صورة جزء بتطبيق:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A جزء من E.

نسمي صورة الجزء A بالتطبيق f ، مجموعة صور عناصر A بالتطبيق f. نرمز لها بالرمز f(A). $\boxed{f(A) \subset F}$

لدينا: $\boxed{f(A) = \{y \in F / y = f(x) \quad و \quad x \in A\}}$ $\boxed{y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / f(A) = y}$

خاصيات

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A و B جزئين من E.

لدينا:

1) $f(A) \subset F$

2) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

3) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

4) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2)الصورة العكسية لجزء بتطبيق:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F و B جزء من F

مجموعة العناصر x من E بحيث $f(x)$ ينتمي إلى B تسمى الصورة العكسية للجزء B، نرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$

لدينا: $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}}$ و $\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$

ملاحظة:

ليكن f تطبيقا من E نحو F و B جزء من F.

$f^{-1}(B) = \varnothing$ لا يعني أن $B = \varnothing$

خاصيات

ليكن f تطبيقا من E نحو F و C و D جزئين من E.

لدينا:

1) $f^{-1}(C) \subset E$

2) $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

3) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

IV) التطبيق التبايني- التطبيق الشمولي-التطبيق التقابلي:

1) التطبيق التبايني

تعريف:

ليكن f تطبيقا من E نحو F

نقول إن التطبيق f تبايني من E نحو F إذا كان كل عنصر y من F له سابق واحد على الأكثر في E

بتعبير آخر: *f تطبيق تبايني من E نحو F يعني $\boxed{\forall(x_1;x_2)\in E^2:(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2)}$

يعني $\boxed{\forall(x_1;x_2)\in E^2:(x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))}$

* f تطبيق غير تبايني من E نحو F يعني: $\boxed{\exists(x_1;x_2)\in E^2 f(x_1)=f(x_2) \text{ و } x_1\neq x_2}$

2) التطبيق الشمولي:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F.
نقول إن التطبيق f شمولي من E نحو F إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقا على الأقل في E

بتعبير آخر: * f تطبيق غير شمولي من E نحو F يعني $\boxed{(\forall y\in F)\ (\exists x\in E)/y=f(x)}$

*f تطبيق غير شمولي من E نحو F يعني: $\boxed{(\exists y\in F)/(\forall x\in E)\ y\neq f(x)}$

خاصية

ليكن f تطبيقا من E نحو F.
(التطبيق f شمولي من E نحو F) $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$

3) التطبيق التقابلي- التطبيق العكسي لتقابل:

تعريف

ليكن f تطبيقا من E نحو F.
نقول إن التطبيق f تقابل من E نحو F إذا وفقط إذا كان التطبيق f تباينا وشموليا من E نحو F.

بتعبير آخر: التطبيق f تقابل من E نحو F إذا وفقط إذا كان كل عنصر من F يقبل سابقا وحيدا في E

$$\boxed{(\forall y\in F)(\exists! x\in E)/y=f(x)}$$

f تقابل من E نحو F يعني كذلك أن المعادلة $\boxed{f(x)=y}$ تقبل حلا وحيدا في E لكل y من F.

تعريف وخاصية

ليكن f تطبيقا تقابليا من E نحو F.
التطبيق الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E بحيث: $y=f(x)$ تقابل من F نحو E ويسمى التطبيق العكسي للتقابل f. نرمز لهذا التطبيق بالرمز f^{-1} .

ولدينا:

$$\boxed{\begin{cases} f(x)=y \\ x\in E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in F\end{cases}}$$

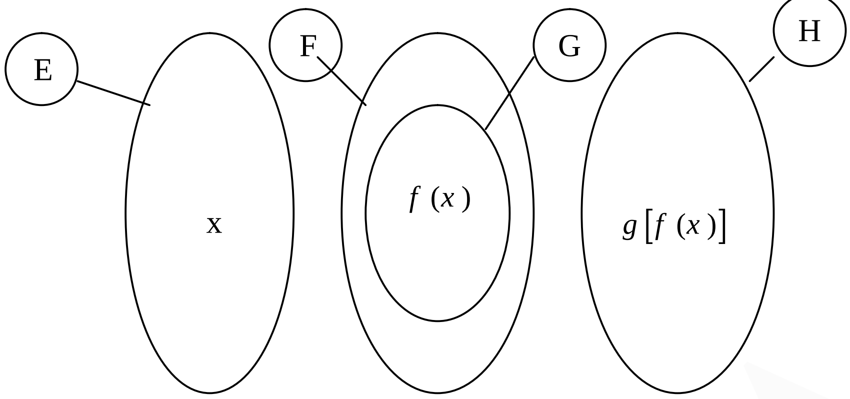
7) مركب تطبيقين

تعريف:

ليكن f تطبيقا من E نحو F و g تطبيقا من G نحو H بحيث $f(E) \subset G$.

نعرف تطبيقا نرمز له بالرمز gof من E نحو H كما يلي : $\forall x \in E, gof(x) = g(f(x))$.

التطبيق gof يسمى مركب التطبيقين f و g في هذا الترتيب



$\boxed{f(E) \subset G}$

$$E \longrightarrow F \longrightarrow H$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow gof(x) = g(f(x))$$

خاصيات:

ليكن f تطبيقا من E نحو F و g تطبيقا من F نحو G.

-- إذا كان f و g تباينين فإن التطبيق gof تبايني من E نحو G

-- إذا كان f و g شموليين فإن التطبيق gof شمولي من E نحو G

-- إذا كان f و g تقابليين فإن التطبيق gof تقابل من E نحو G ولدينا: $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

-- إذا كان f تقابلا فإن: $\forall x \in F, fof^{-1}(x) = x$ و $\forall x \in E, f^{-1}of(x) = x$