تمارين درس النهاية والإتصال

التمرين رقم1

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}$ نعتبر الدالة f المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+x^2+.....x^n-n}{x-1} \quad ; \; x\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{n(n+1)}{2} \quad ; \; n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) حدد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^k-1}{x-1}$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

2) بين أن f متصلة في $x_0=1$.

التمرين رقم2

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\pi,+\pi[$ بما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}; x\neq 0 \\ 0; x=0 \end{cases}$$

1) بين أن: $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[: \sin(x)<x<\tan(x)$.

2) بين أن: $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\; 0<\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$.

3) أدرس زوجية f ثم اتصال f في الصفر.

التمرين رقم3

نعتبر الدالة العددية f:

$$\begin{cases} f(x)=\sin\left(xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right); x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن f متصلة على يمين الصفر.

2) ليكن $k\in\mathbb{N}^*$، حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة $E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=k$

3) ليكن f_k قصور الدالة على مجموعة حلول المعادلة السابقة.حدد تعبيرا لكل من $f_k(x)$ و $f_{k-1}(x)$ مع $k\in\mathbb{N}^*$.

4) أدرس اتصال f على المجال $[0,\pi]$

التمرين رقم4

لتكن f_m الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f_m(x)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{2}{3}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)} \quad ; \; x>0 \\ f_m(x)=x^2+mx+m+\dfrac{2m+1}{x+1} \quad ; \; x\leq 0 \end{cases}$$

حيث m بارامتر حقيقي.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$.

2) حدد m لكي تكون الدالة f_m متصلة في الصفر.

3) حدد m لكي تقبل الدالة f_m تمديدا بالإتصال في -1

التمرين رقم5

لتكن $L(a,b)$ مجموعة الدوال f التي تحقق العلاقة التالية :

$$\boxed{\exists k>0/\forall(x,y)\in[a,b]^2 : |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|}$$

1) بين أن كل دالة f من $L(a,b)$ هي دالة متصلة على $[a,b]$

2) تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{x}$.

a) بين أن f متصلة على المجال $[0,1]$ و $f\notin L(a,b)$.

b) ماذا يمكن أن نستنتج مما سبق؟.

التمرين رقم6

نعتبر الدالة العددية f حيث : $f(x)=\min|x-k|$ مع $k\in\mathbb{Z}$

1) بين أن العدد 1 دور للدالة f .

2) بين أن الدالة f تكتب على الشكل :

$$\begin{cases} f(x)=x \quad ; \quad 0\leq x\leq \dfrac{1}{2} \\ f(x)=1-x \quad ; \quad \dfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

3) أدرس اتصال f على $\mathbb{R}$.

التمرين رقم7 :

1) لتكن f دالة متصلة على المجال $[0,1]$ و $f([0,1])\subset[0,1]$

بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists c\in[0,1])/f(c)=c^n$

2) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists x_0\in[0,1])/4x_0^{\,n}=1+2x_0$

التمرين رقم8

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$.

1) بين أن: $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+*2})\;(\exists\;\alpha\in[a,b])$
$xf(a)+yf(b)=(x+y)f(\alpha)$

2) ليكن x_0 من المجال $[0,1]$. أثبت أن:

$\exists\;\lambda\in[a,b]/f(\lambda)=x_0f(a)+(1-x_0)f(b)$

التمرين رقم9

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$ حيث :

$\forall x\in]0,+\infty[:0\leq f(x)<x$

1) بين أن $f(0)=0$

2) ليكن $[a,b]\subset]0,+\infty[$ بين أن:

$(\exists k\in[0,1[)/\forall x\in[a,b] f(x)\leq kx$

التمرين رقم10

لتكن f دالة متصلة و موجبة قطعا على مجال $[a,b]$.

1) بين أن $(\exists\lambda>0)/(\forall x\in[a,b]):f(x)\geq\lambda$

2) لتكن g و h الدالتين متصلتين على $[a,b]$

حيث $h(x)\geq g(x)$ لكل x من $[a,b]$.

بين أن: $\exists k>0/\forall x\in[a,b]:h(x)\geq g(x)+k$

التمرين رقم11

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ حيث: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\end{cases}$ و $ab<0$

1) بين أن: $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 / f(\alpha).f(\beta)<0$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الاقل حلا في $\mathbb{R}$.

التمرين رقم12

لتكن f دالة متصلة على مجال $]a,b[$ وتحقق $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty\end{cases}$

1) بين أن : $\exists(\alpha,\beta)\in]a,b[^2 / f(\alpha).f(\beta)<0$.

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الاقل حلا في $]a,b[$

3) لتكن g دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ بين أن :

$$\exists c\in]a,b[/ f(c)=g(c)$$

4) بين $\exists c\in]a,b[/ \sqrt{\frac{b-c}{c-a}}-\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}=\sqrt{(b-c)(c-a)}$

التمرين رقم13

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0,1]$ بحيث: $f(0)=f(1)$.

1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي: $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

2) نعتبر الدالة u المعرفة بما يلي: $u(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$

حيث $n\in IN^*$. بين أن $\sum\limits_{0\le k\le n-1} u(\frac{k}{n})=0$

3) إستنتج أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0\ ,\ 1-\frac{1}{n}\right]$

التمرين رقم14

نعتبر f الدالة المعرفة ب: $f(x)=\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}$. $(a<b)$

1) بين أن f تقابل من $]a,b[$ نحو IR .

2) حدد التقابل العكسي f^{-1} .

التمرين رقم15

نعتبر f الدالة المعرفة ب : $f(x)=\sqrt[3]{x(x+1)^2}-1$

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

2) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

3) بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.

4) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

5) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f(x)<x$

التمرين رقم16

نعتبر f الدالة المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases}f(x)=Arctg\frac{1}{x}+\sqrt{\pi Arcgx}\ ,x>0\\ f(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

1) بين أن $(\forall x>0): arctg\frac{1}{x}+arctgx=\frac{\pi}{2}$

2) ادرس اتصال f على D_f .

3) احسب نهايات f عند محدات D_f و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x}$.

4) تحقق أن :

$$(\forall x\in IR^+): f(x)=-(\sqrt{arctgx}-\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2+\frac{3\pi}{4}$$

ثم استنتج أن f رتيبة قطعا على $[1,+\infty[$.

5) ليكن g قصور f على المجال $[1,+\infty[$.

بين أن g تقابل وحدد تقابله العكسي .

التمرين رقم17

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=xArc\tan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right); x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$$

1) أدرس زوجية الدالة f ثم اتصال f في الصفر.

2) ليكن $x>0$ ، بين أن: $f(x)=\frac{\pi x}{2}-\frac{x}{2}Arc\tan(x)$

واستنتج صيغة مبسطة ل : $f(x)$ على $\mathbb{R}^{*-}$.

3) نعتبر المعادلة : $(E)\quad Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{5\pi}{12}$

a) بين أن : $(E)\ \Leftrightarrow\ f(\sqrt{x})=\frac{5\pi\sqrt{x}}{12};\forall x>0$

b) أعط حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}^{*+}$.

التمرين رقم18

لتكن f الدالة المعرفة ب : $f(x)=Arc\tan\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$

1) حدد D_f وأحسب نهايات f عند محدات D_f.

2) بين أن :

$$f(x)=\begin{cases}2\arctan(x)+\frac{5\pi}{4}\ ;\ x<-\sqrt{2}-1\\ 2\arctan(x)+\frac{\pi}{4}\ ;\ -\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}-1\\ 2\arctan(x)-\frac{3\pi}{4}\ ;\ x>\sqrt{2}-1\end{cases}$$