

الدرس الأول: مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ومبادئ في الحسابيات

(I) تقديم:

-- المجموعة $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية.

-- المجموعة $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة.

(II) قابلية القسمة في المجموعة \mathbb{N}

(1) قواسم عدد صحيح طبيعي:

(a) تعريف:

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين و b غير منعدم.
نقول إن a قابل للقسمة على b أو b يقسم a ونكتب a/b إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $a = bk$.

(b) ملاحظات:

- العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.
- كل عدد صحيح طبيعي مخالف ل 1 يقبل على الأقل قاسمًا ن هما 1 ونفسه.

(c) خاصيات:

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية.

-- إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

-- إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن a يساوي b .

-- إذا كان a قاسمًا للعددين b و c فإن a قاسم لكل من العددين:

$$b+c \text{ و } b-c$$

-- إذا كان a قاسمًا للعدد b فإن a قاسم للعدد bc .

البرهان على شكل تمارين.

(d) نتائج: مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، يكون n قابلا للقسمة:

على 2: إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.

على 4: إذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب

عددا قابلا للقسمة على 4.

على 5: إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.

على 9: إذا كان مجموع أرقامه قابل للقسمة على 9.

(2) الأعداد الزوجية والأعداد الفردية:

(a) تعريف:

-- كل عدد صحيح طبيعي a قابل للقسمة على 2 يسمى عددا زوجيا.

و يكتب على الشكل $a = 2p$ حيث p عدد صحيح طبيعي.

-- كل عدد صحيح طبيعي a غير قابل للقسمة على 2 يسمى عددا فرديا.

و يكتب على الشكل $a = 2p + 1$ حيث p عدد صحيح طبيعي.

(b) ملاحظات:

-- كل عدد صحيح طبيعي يكون إما عددا زوجيا وإما عددا فرديا.

-- يكون عدد صحيح طبيعي زوجيا إذا كان رقم وحداته زوجي.

-- يكون عدد صحيح طبيعي فرديا إذا كان رقم وحداته فرديا.

(c) خاصيات:

-- إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين زوجيين فإن المجموع $a+b$

والفرق $a-b$ زوجيان والجداء ab زوجيا.

-- إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين فرديين فإن المجموع $a+b$

والفرق $a-b$ زوجيان والجداء ab فردي.

-- إذا كان a زوجي و b فردي فإن المجموع $a+b$ والفرق $a-b$ فرديان

و الجداء ab زوجي.

-- إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين متتابعين فإن المجموع $a+b$

والفرق $a-b$ فرديان والجداء ab زوجي.

البرهان على شكل تمارين.

تمارين تطبيقية:

(1) هل العدد 4218 قابل للقسمة على كل من: 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

(2) ضع الرقم المناسب مكان كل علامة \otimes لكي تحصل على عدد قابل للقسمة على 2 و 9. $13 \otimes 2, 54 \otimes \otimes, 6 \otimes 1 \otimes$.

(3) أدرس زوجية الأعداد الصحيحة الطبيعية التالية: $n \in \mathbb{N}$

$$3n + 6, 4n + 2, 8n + 7, 2n + 3, (n + 2)(n + 3)$$

$$2n^2 + 4n + 5, n^2 + 2n + 2, 1 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$$

(4) ليكن $n \in \mathbb{N}$. بين أنه:

_ إذا كان n زوجيا فإن n^2 زوجي و العكس صحيح.

_ إذا كان n فرديا فإن n^2 فردي و العكس صحيح.

(3) مضاعفات عدد صحيح طبيعي:

(a) تعريف:

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين و b غير منعدم.

نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي k

$$\text{بحيث } a = bk.$$

(b) ملاحظات:

-- العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

-- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لا نهاية من المضاعفات.

-- للعدد 0 مضاعف وحيد هو الصفر.

-- كل عدد صحيح طبيعي a هو مضاعف لنفسه و للعدد 1.

(c) خاصيات:

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية.

-- إذا كان b مضاعفا ل a و c مضاعفا ل b فإن c مضاعف ل a .

-- إذا كان a و c مضاعفين ل a فإن $b+c$ و $b-c$ مضاعفان ل a .

-- إذا كان b مضاعفا ل a فإن الجداء bc مضاعف ل a لكل c من \mathbb{N} .

البرهان على شكل تمارين.

تمارين تطبيقية:

(1) حدد مضاعفات 18 و مضاعفات 24 التي هي أصغر من 200.

(2) حدد جميع الأعداد الزوجية القابلة للقسمة على 4 و 5 و المحصورة بين 201 و 351.

(3) بين أنه إذا كان a مضاعفا ل b^2 فإن a مضاعف ل b .

(4) بين أنه إذا كان a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية زوجية

متتابة فإن المجموع $a+b+c$ يكون مضاعفا للعدد 6.

(5) بين أنه إذا كان a و b مضاعفين ل a فإن $2c+3b$ مضاعف ل a .

(4) الأعداد الأولية:

(a) تعريف: ليكن p عدد صحيح طبيعي.

نقول إن p عددا أوليا، إذا كان يقبل قاسمان فقط وهما 1 و p .

(b) ملاحظات:

(1) لتحديد الأعداد الأولية الأصغر من عدد معلوم نتبع الطريقة التالية:

2 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

3 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

5 عدد أولي و كل مضاعفاته المخالفة له ليست أولية.

.....

. نستمر هكذا إلى أن نحصل على جدول الأعداد الأولية المطلوب.

(2) طريقة لتحديد ما إن كان عددا ما أوليا أم لا.

a (ليكن n عدد صحيح طبيعي.

نبدأ بتحديد جميع الأعداد الأولية p التي تحقق $p^2 \leq n$

- إذا كان n يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد، نقول إن n ليس أوليا.

- إذا كان n لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد، نقول إن n عددا أوليا.

(b) لكي نتحقق هل n أولي يمكن اتباع الخوارزمية التالية:

نقوم بقسمة n على الأعداد الأولية p انطلاقا من 2 على التوالي ونقف عند إحدى الحالات:

- إذا أصبح الخارج q أصغر من p قطعاً، والباقي غير منعدم فإن n عدد أولي.

- إذا حصلنا على باقي منعدم. فإن n غير أولي.

(c) أمثلة: لائحة الأعداد الأولية الأصغر من 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

5) تفكيك عدد غير أولي إلى جداء عوامل أولية:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \text{ و } 12 = 2 \times 3 \times 3$$

(a) أمثلة:

(b) خاصية:

كل عدد صحيح طبيعي n غير أولي أكبر من 1 يمكن تفكيكه إلى جداء

عوامل أولية. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ حيث:

- الأعداد p_i أولية موجبة ومختلفة مثلي مثلي.

- الأعداد α_i طبيعية غير منعدمة.

(c) ملاحظة:

كل عدد أولي p أكبر من 2 هو عدد فردي.

(d) كيفية تفكيك عدد غير أولي إلى جداء عوامل أولية:

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

(III) القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

1) قاسم مشترك عددين - مضاعف مشترك عددين.

(a) تعاريف:

-- يكون عدد صحيح طبيعي d قاسما مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a و b إذا كان قاسما لكل منهما.

-- يكون عدد صحيح طبيعي m مضاعفا مشتركا لعددين صحيحين طبيعيين a و b إذا كان مضاعفا لكل منهما.

(b) أمثلة:

1) قواسم 12 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 12.

قواسم 18 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 9 و 18.

1 و 2 و 3 و 4 و 6 هي القواسم المشتركة للعددين 12 و 18
2 و 12 و 24 و 36 و ... مضاعفات مشتركة للعددين 4 و 6.

2) القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك

الأصغر لعددين:

(a) تعاريف:

- القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو أكبر القواسم المشتركة لكل من a و b .

$$\text{و يرمز له ب: } p \text{ gcd}(a, b) = a \wedge b = \Delta(a, b)$$

- المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو أصغر المضاعفات المشتركة لكل من a و b .

$$\text{و يرمز له ب: } p \text{ pccm}(a, b) = a \vee b = M(a, b)$$

(b) أمثلة:

$$p \text{ gcd}(12, 30) = 6; ; ; p \text{ pccm}(4, 6) = 12$$

(c) نتائج:

- القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أصغر أس.

- المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أكبر أس. إضافة إلى العوامل الغير المشتركة.

مثلا:

76	2	632	2
38	2	316	2
17	17	158	2
1		79	79
		1	

$$\text{لدينا: } 76 = 2^2 \times 17 \text{ و } 632 = 2^3 \times 79$$

$$632 \wedge 76 = 2^2 = 4$$

إذن:

$$632 \vee 76 = 2^3 \times 19 \times 79 = 12008$$

3) الأعداد الأولية فيما بينها:

(a) تعريف:

نقول إن a و b من \mathbb{N} أوليان فيما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 ونكتب: $a \wedge b = 1$.

(b) أمثلة:

$$12 \wedge 11 = 1 \text{ و } 2 \wedge 3 = 1 \text{ و } 3 \wedge 5 = 1$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

1) حدد d القاسم المشترك الأكبر للعددين:

$$p = 118404 \text{ و } q = 13884$$

$$(2) \text{ أحسب: } p' = \frac{118404}{d} \text{ و } q' = \frac{13884}{d}$$

3) تحقق أن: p' و q' أوليان فيما بينهما ثم إستنتج الشكل المختصر

$$\frac{118404}{13884} \text{ للكسر:}$$

تمرين 2:

نعتبر الأعداد التالية:

$$a = 2^2 \times 5^3 \times 7^4, b = 2^3 \times 5^4 \times 7^4, c = 2^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$$

1) حدد $\text{pgcd}(a, b, c)$ و $\text{ppcm}(a, b, c)$.

2) بين أن العدد b مضاعف للعدد a .

3) هل العدد a يقسم العدد c .

تمرين 3: نعتبر العدد: $x = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

1) حدد باقي وخارج القسمة الإقليدية للعدد $x+1$ على 2 و 3 و 4 و 5 و 6.
2) هل العدد $x+1$ أولي؟

3) هل الأعداد: $x+2$ و $x+3$ و $x+4$ و $x+5$ و $x+6$ أعداد أولية؟